数理解析研究所講究録
第1988巻 2016年 43-54

Some remarks on infinite hat guessing games

嘉田勝 (Masaru Kada)　　静間荘司 (Souji Shizuma)
大阪府立大学 (Osaka Prefecture University)

1 はじめに

本論文では以下のパズルを一般化したものを扱う.

1つ目のパズル

2人の囚人があるゲームをするため部屋に入れられ帽子を1つ被せられます. この帽子は黒白どちらかの色が付いています. そして自分が被っている帽子は本人には見えませんが, もう一方の囚人には見えます. また部屋に入ってからは互いにコミュニケーションが取れません. この状態で同時に自分が被っている帽子の色を宣言させ, 正解者が1人でもいれば2人とも釈放されます. また部屋に入る前に, このルールは囚人2人に伝えられ, 2人で作戦を考えることが可能です. このときどのような帽子の被せられ方をしても1人以上が正解する作戦は存在するでしょうか?

パズルには次のようなものもある.

2つ目のパズル

先ほどのパズルのルールの中で囚人の数を5人にし, 囚人たちに番号0,1,2,3,4が付いているとします. さらに自分よりも大きな番号の囚人の帽子しか見えないようにします. 階段上に囚人が0番の囚人を一番上に一段ずつ立っていると考えると分かりやすいです. そして今回は発言は同時ではなく0番の囚人から順に1人ずつ発言していくものとします. 各囚人は自分未満の番号の囚人の発言を聞いた後に発言します. 要求される正解数を4人以上とします. それ以外のルールは同じとして囚人たちが釈放される作戦は存在するでしょうか?

1つ目のパズルでは1人の囚人が見えた色と同じ色を, もう1人の囚人が見えた色と違

Masaru Kada (嘉田勝): email kada@mi.s.osakafu-u.ac.jp

う色を発言することで2人とも釈放される．2つ目のパズルでは囚人0が囚人1から4の中での白色の帽子の個数を見て，偶数なら色，奇数なら黒と発言する．すると残りの囚人はその情報と自分が見えている帽子の白の個数から自身の帽子の色を推測できるため全員が釈放される．

このように，何人かの囚人と何色かの帽子が登場し，各囚人が他の囚人の帽子に色という情報のみで自身の見えない帽子の色を推測し発言するパズルを総称して Hat Ploblem，囚人と帽子パズル，帽子当てゲームなどと呼ばれる．本論文では単に帽子パズルと呼ぶ．1959 年の Martin Gardner による "The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions" [3] で紹介された上記のような帽子パズルは 1965 年には Fred Galvin によって無限の囚人や色が登場するパズルへ拡張され，21 世紀に入り，集合論での結果を用いた帽子パズルについての定理が数多く発表され，2010 年には Christopher S. Hardin と Alan D. Taylor によってそれらの結果を統一的にまとめたテキスト "The mathematics of Coordinated Inference" [5] が出版された．本論文では1つ目のパズルで囚人の人数を可算人に拡張し，帽子の見え方を特殊なものにした EO パズルと呼ばれる無限パズル，2つ目のパズルで囚人の集合を不可算も含め拡張した無限パズルという2つのパズルに関しての新たな結果を紹介する．上記のテキストを主に参考にし，記法や定義などもそちらに合わせる．2節ではパズルの形式化やパズルに対しての定理に用いる集合論での知識をまとめる．3章ではそれらを用いてパズルの用語の定義を行う．4節では，2つ目のパズルを拡張した無限パズルを扱い，5節では EO パズルを扱う．

2 集合論での準備

ここではのちに用いる集合論での記法や定理を導入する．

- 集合 X に対し $|X|$ は X の濃度を表す．
- 集合 x, y に対し x と y の順序対を $\langle x, y\rangle$ で表し，関数とは順序対の集合とする．よって2つの関数 $f, g : X \to Y$ に対し $f \cap g = \{\langle x, y\rangle : x \in X$ かつ $f(x) = g(x) = y\}$ となる．便宜的な記法として，$f \triangle g$ は $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ を表すとする．関数 $f : X \to Y$ と $X' \subseteq X$ に対し $f \restriction X'$ を f の X' への制限とする．集合 X, Y に対し ${}^X Y$ を $\mathrm{dom}(f) = X$，$\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$ な関数全体の集合とする．
- AC は選択公理を表す．以降特に断らない限り全ての定理は ZFC での定理とする．連続体仮説 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ は CH で表す．
- 実数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が meager であるとは，closed nowhere dense な集

合からなる列 $\{N_m \subseteq \mathbb{R} : N_m$ は closed nowhere dense$\}_{m\in\omega}$ で $A \subseteq \bigcup_{m\in\omega} N_m$ なるものが存在するときにいう．$\mathcal{M}$ は $\mathbb{R}$ の meager subset 全体を表す．

次に parity function を定義し，その存在を AC を用いて証明する．$2 = \{0,1\}$ として基数 $\kappa \geq \omega$ に対し κ-parity function とは $\forall f, g \in {}^{\kappa}2\Big(|f \triangle g| = 1 \to p(f) = 1 - p(g)\Big)$ と定義する．ω-parity function は一般的には単に parity function と呼ばれている．

Lemma 1

任意の無限基数 κ に対し κ-parity function が存在する．

Proof ${}^{\kappa}2$ 上の二項関係 F を $fFg \Leftrightarrow |f \triangle g| < \omega$ で定義する．さらに二項関係 E を $fEg \Leftrightarrow fFg \wedge |f \triangle g|$:even で定義する．F, E は同値関係であり，それぞれの関係での f の同値類を $[f]_F$ と $[f]_E$ で表す．商集合 $\{[f]_F : f \in {}^{\kappa}2\}$ 上の選択関数 c に対し $p : {}^{\kappa}2 \to 2$ を

$$p(f) \quad = \quad \begin{cases} 0 & c([f]_F) \in [f]_E \\ 1 & c([f]_F) \notin [f]_E \end{cases}$$

で定めると，この p は κ-parity function となっている． □

最後に 3 つの基数不変量を定義し，関連した事実を引用する．基数 κ に対し主張「任意の可算な poset $\mathbb{P}$ の dense subset の族 $\mathcal{D}$ が $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ ならば $\mathcal{D}$-generic filter が存在する」(可算な poset $\mathbb{P}$ と基数 κ についてのマーティンの公理) を MA_κ(countable) と略記する．1 つ目の基数不変量 $\mathfrak{m}_{\text{countable}}$ を

- $\mathfrak{m}_{\text{countable}} \quad = \quad \min\{\kappa : \neg\, \mathrm{MA}_\kappa(\text{countable})\}$

と定義する．続いて $\mathcal{M}$ を用いた 2 つの基数不変量を

- $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \quad = \quad \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \wedge \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\}$
- $\mathrm{non}(\mathcal{M}) \quad = \quad \min\{|X| : X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \notin \mathcal{M}\}$

で定義する．次の定理はよく知られている（証明はたとえば [2] を見よ）．

Lemma 2

$\mathfrak{m}_{\text{countable}} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$

さらに 2 つの関数 $f, g \in {}^{\omega}\omega$ が infinitely agree とは $|f \cap g| \geq \omega$ であるとし，only finitely agree とは $|f \cap g| < \omega$ とする．次の定理は [1, pp.55–59] で証明されている．

Lemma 3

(a) $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\{|F| : F \subseteq {}^{\omega}\omega \wedge \forall g \in {}^{\omega}\omega \exists f \in F(f$ と g は only finitely agree$)\}$

(b) $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \min\{|F| : F \subseteq {}^{\omega}\omega \wedge \forall g \in {}^{\omega}\omega \exists f \in F(f$ と g は infinitely agree$)\}$

またこの 2 つの基数不変量は $\aleph_1 \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq 2^{\aleph_0}$, $\aleph_1 \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}) \leq 2^{\aleph_0}$ であることが知られている．

${}^{\omega}\omega$ の部分集合 G が agreeable であるとは，$|F| < |G|$ なる F をどのようにとっても，$g \in G$ で，すべての $f \in F$ について f, g が infinitely agree するものが存在することをいう．

3 パズルの一般化と用語の定義

帽子パズルには様々な種類がある．各パズルを特徴付ける 4 要素があり，まず 2 つが囚人の人数，帽子の色の個数である．次が各囚人の帽子の見え方，これは自身の帽子が見えないといった性質は全パズル共通で，どのように各囚人がどのように見えているかは各パズル異なるからであり，最後が発言方法である．この論文ではその 4 要素が異なるいくつかのパズルを統一的に扱いたいため全てに適用できるパズルの形式化を行う．もう 1 つの今回の形式化の利点として各要素の名称や表現方法が定まればその名称などを並べることで 1 つのパズルを表現できて定理や補題などの主張が言い表しやすくなり比較もしやすくなるからである．

- 囚人の集合は A，帽子の色の集合は K で表す．よって 2 要素である囚人の人数，色の個数は A, K の濃度で表現できる．また濃度が無限になる場合はその基数と A や K を同一視する．
- A 上のループや多重辺を持たない有向グラフを視野グラフと呼ぶ．囚人 a が囚人 b の帽子を見えていることを a から b への有向辺の存在で，ループを持たないことで自身の帽子が見えないことを表現できている．多重辺を持つことがパズルにおいて意味がないことは明白である．視野グラフは V で表す．ある V において a が b の帽子が見えていること，a から b への有向辺が存在することは aVb で，a が見えている囚人の集合を $V(a)$ で表す．よって $V(a) = \{b \in A : aVb\}$ となる．3 つ目の要素である帽子の見え方の特徴付けはグラフ理論におけるグラフの特徴付けを用いる．本論文で扱う視野グラフは以下の 5 種類である．
  - * 完全グラフ．V が完全であるときどの囚人も自分以外の全ての帽子が見えて

いる，例えば $V(a) = A \setminus \{a\}$ と表現できる．

* 完全二部グラフ．A が共通部分のない 2 つの真部分集合 B, C に分割され，全ての B の囚人は B 内の一切の帽子が見えず，C の帽子は全て見える，全ての C の囚人は C 内の一切の帽子が見えず，B の帽子は全て見えるような視野グラフである．例えば $\forall a \in B(V(a) = C) \wedge \forall a \in C(V(a) = B)$ と表現できる．
* 基数 κ に対し $A = \kappa$ となっていて V が一方通行であるとは $\alpha V \beta \to \alpha < \beta$，つまり自分以下の囚人の帽子が必ず見えないような視野グラフである．
* 一方通行な視野グラフが前方完全であるとは $aVb \leftrightarrow a < b$，つまり自分より大きな囚人は全て見えるような，$V(\alpha) = \kappa \setminus (\alpha + 1)$ な視野グラフ．
* $A = \omega$ となっていて V が EO(even-odd) であるとは全ての偶数は自分より大きな奇数が全て見えて，全ての奇数は自分より大きな全ての偶数が見えるような視野グラフ．

V が EO なパズルは視野グラフが一方通行なパズルの一種である．

・最後の要素である発言方法は本論文では以下の 2 つを扱う．

* 同時発言型．これは 1 つ目のパズルのように全囚人が同時に自分が予想した色を発言するパズルである．
* 順次発言型．これは 2 つ目のパズルのように A が整列集合になっていて最小の囚人から順に自分未満の発言を聞いてから発言するパズル．

よって各パズルを構成する 4 要素を表現できた．すると 1 つ目のパズルとは同時発言型 2 人 2 色（視野）完全パズル，2 つ目のパズルは順次発言型 5 人 2 色前方完全パズルと言い表せる．次に囚人たちの作戦に関する用語を定義する．

・$f : A \to K$ を coloring と呼ぶ．よって $C = {}^{A}K$ とおいて C は coloring 全体の集合で，1 つの帽子の被せ方に 1 つの coloring が対応している．$a \in A$ に対し $f, g \in C$ が $f \restriction V(a) = g \restriction V(a)$ をみたすとき a にとって f, g が見分けが付かないことを意味する．

・$a \in A$ に対し $G_a : C \to K$ が $\forall f, g \in C(f \restriction V(a) = g \restriction V(a) \to G_a(f) = G_a(g))$ をみたすとき G_a は a の guessing strategy または単に戦略と呼ぶ．みたすべき条件は囚人の戦略を合理的なものとして定義するためである．よって $a \in A$ が $f \in C$ の下で G_a で正解していることを $G_a(f) = f(a)$ で表現できる．

・全ての囚人 $a \in A$ に対しそれぞれに戦略 G_a が定まっているとき，その全戦略に対しての predictor $P : C \to C$ を $P(f) = \{\langle a, G_a(f) \rangle : a \in A\}$，または $\forall a \in A \forall f \in C(P(f)(a) = G_a(f))$ で定義する．

predictor を定義する意図は例えば 1 つ目のパズルにおいて「常に 1 人以上正解する作戦が存在する」を $\exists P$: predictor$\forall f \in C(P(f) \cap f \neq \emptyset)$ や $\exists P$: predictor$\forall f \in C(|P(f) \cap f| \geq 1)$ と表現できるからである．またこのような predictor は minimal predictor と呼ばれる．2 つ目のパズルにおける「常に不正解者が 1 人以下な作戦が存在する」は $\exists P$: predictor$\forall f \in C(|P(f) \triangle f| \leq 1)$ と表現できる．このような predictor を up to one error predictor と呼ぶことにする．これによって 1 つ目のパズルの結果は「同時発言型 2 人 2 色視野完全パズルにおいて minimal predictor が存在する」，2 つ目のパズルの結果は「順次発言型 5 人 2 色前方完全パズルに up to one error predictor が存在する」と短く言い表せる．3 節では $|A|$ を様々な基数にした順次発言型 2 色前方完全パズルにおける up to one error predictor の存在性を，4 節では同時発言型 EO パズルにおいて $|K|$ を様々な基数にしたさいの minimal predictor の存在性について述べる．

4　順次発言型 2 色前方完全パズルにおける up to one error predictor の存在性

Stefan Geschke, Robert Lubarsky, Mona Rahn の "choice and the hat game" [4] において次の定理が証明されている．

Theorem 4

以下は同値．

(1) parity function が存在する．

(2) 順次発言型可算人 2 色前方完全パズルに up to one error predictor が存在する．

この節の目標は彼らと同様の証明法で (1) $\Rightarrow$ (2) よりも強い主張である「κ-parity function が存在 $\Rightarrow |A| = \kappa$ な順次発言型 2 色前方完全パズルに up to one error predictor が存在」を証明することになっている．すると ZFC ではどんな人数の順次発言型 2 色前方完全パズルにおいても up to one error predictor が存在することを証明できることになる．

まず次の補題を示す．

Lemma 5

$A = \kappa \geq \omega$, $K = 2 = \{0, 1\}$ な順次発言型前方完全なパズルにおいて

(a) 不正解者が常に 0 人になるような predictor は存在しない

(b) predictor $\langle G_\alpha, \alpha < \kappa \rangle$ が up to one error ならば $\forall f \in {}^\kappa 2 \forall \alpha > 0 (G_\alpha(f) = f(\alpha))$

Proof

(1) $\langle G_\alpha, \alpha < \kappa \rangle$ が常に不正解者が 0 人になる predictor だったとする．つまり $f \in {}^\kappa 2$ を任意にとれば $\forall \alpha < \kappa (G_\alpha(f) = f(\alpha))$．$g \in {}^\kappa 2$ を $g(0) \neq f(0) \wedge g \restriction \kappa \setminus \{0\} = f \restriction \kappa \setminus \{0\}$ をみたすようにすると $G_0(g) = G_0(f)$ から $G_0(g) \neq g(0)$ より coloring g では囚人 0 は不正解，つまり $\langle G_\alpha, \alpha < \kappa \rangle$ の仮定に反する．

(2) $P = \langle G_\alpha, \alpha < \kappa \rangle$ が up to one error predictor とする．$\exists f \in {}^\kappa 2 \exists \alpha > 0 (G_\alpha(f) \neq f(\alpha))$ だったとしてそのような f, α を固定する．P が up to one error より α 以外の囚人は全員正解なので囚人 0 は正解している．$g \in {}^\kappa 2$ を $g(0) \neq f(0) \wedge g \restriction \kappa \setminus \{0\} = f \restriction \{0\}$ なものとしてとれば $G_0(g) = G_0(f) = f(0) \neq g(0)$ より g では囚人 0 は不正解．さらに $\forall \beta < \alpha (G_\beta(g) = G_\beta(f))$ であることが帰納的に分かる．すると囚人 α が発言前に聞く他の囚人の発言は f, g で同じであり，$g \restriction \kappa \setminus \alpha + 1 = f \restriction \kappa \setminus \alpha + 1$ より $G_\alpha(g) = G_\alpha(f) \neq f(\alpha) = g(\alpha)$，つまり coloring g では囚人 0 と α が不正解で P が up to one error であることに矛盾．□

Theorem 6

無限基数 κ に対し κ-parity function が存在するならば $|A| = \kappa$ な順次発言型 2 色前方完全パズルに up to one error predictor が存在する

Proof

$p : {}^\kappa 2 \to 2$ を κ-parity function とする．G_0 で $f \in {}^\kappa 2$ に対し $G_0(f) = p(f \restriction \omega \setminus \{0\})$ で，G_1 を

$$G_1(f) = \begin{cases} 0 & p(\{\langle 1, 0 \rangle\} \cup f \restriction \omega \setminus 2) = G_0(f) \\ 1 & p(\{\langle 1, 1 \rangle\} \cup f \restriction \omega \setminus 2) = G_0(f) \end{cases}$$

で定義する．つまり $f \restriction \omega \setminus \{0\}$ の p での値を囚人 0 に教えてもらい p が κ-parity であること，$\omega \setminus \{0, 1\}$ の p の値が分かることを利用した戦略である．$\alpha > 1$ な囚人は自分未満の p の値を教えてもらえることから $f \restriction \omega \setminus \{0\}$ の自分以外の $f \restriction \omega \setminus \{0\}$ の値が分かるので囚人 1 と同様の戦略で正解できる．□

5 同時発言型 EO パズルにおける minimal predictor の存在性

この節では同時発言型パズルのみを扱う．2 節でも説明した通り EO パズルは可算人一方通行パズルの一種なので次の一方通行パズルについての補題が適用できる．

Lemma 7

$A=\omega$ で K は任意の濃度とする．そのような一方通行パズルにおいて
minimal predictor が存在する $\Leftrightarrow$ 常に無限人が正解する predictor が存在する

Proof

$\Leftarrow$ は明らか．$\Rightarrow$ の対偶 $\forall P:\mathrm{predictor}\exists f\in C\,(|P(f)\cap f|<\omega)\rightarrow\forall P:\mathrm{predictor}\exists f\in C\,(P(f)\cap f=\emptyset)$ を示す．任意に P : predictor を固定する．仮定より $|P(f)\cap f|<\omega$ な $f\in C$ を固定する．$|P(f)\cap f|=0$ ならば証明は終わるため $|P(f)\cap f|=n>0$ とする．$\bigcup(P(f)\cap f)$ に属する，つまり f での正解者を $a_1,\cdots,a_n$ とおき，$a_1<a_2<\cdots<a_{n-1},a_n$ とする．$G_{a_n}:{}^{\omega\setminus\{0,\cdots,a_n\}}K\rightarrow K$ より $G_{a_n}(f)$ と異なる $k_1\in K$ を固定し $f_1=f\restriction\omega\setminus\{a_n\}\cup\{\langle a_n,k_1\rangle\}$ とおくと a_n は f_1 の下で G_{a_n} で不正解となる．同様にして $G_{a_{n-1}}:{}^{\omega\setminus\{0,\cdots,a_{n-1}\}}K\rightarrow K$ より $G_{a_{n-1}(f_1)}$ と異なる k_2 を固定し $f_2=f\restriction\omega\setminus\{a_{n-1}\}\cup\{\langle a_{n-1},k_2\rangle\}$ とおけば a_n,a_{n-1} は f_2 の下でそれぞれの戦略で不正解．これをあと $n-2$ 回行うことで f_n を得て，これは $P(f_n)\cap f_n=\emptyset$ をみたす．□

次に後の証明に用いるために有限人有限色完全二部パズルでの minimal predictor の存在を示す．

Lemma 8

$|A|=(k-1)+k^{k^{k-1}}$，$|K|=k$ な完全二部パズルで A の分割 L,R を $|L|=k-1$，$|R|=k^{k^{k-1}}$ とする．このようなパズルに対して minimal predictor が存在する．

Proof

完全二部グラフの定義から囚人 $\ell\in L$ の戦略 G_ℓ は R の coloring のみに依存するので $G_\ell:{}^{R}K\rightarrow K$，同様に $r\in R$ の囚人の戦略 G_r は $G_r:{}^{L}K\rightarrow K$ と考えられる．$|R|=k^{k^{k-1}}$ より $R=\{r_i:1\leq i\leq k^{k^{k-1}}\}$ と表す．${}^{L}K,{}^{R}K:L,R$ 上の coloring の集合に対し $|{}^{L}K|=k^{k-1}$ で L の囚人の戦略の集合 G_L は ${}^{({}^{L}K)}K$ となるので $|G_L|=k^{(k^{k-1})}$ となる．$G_L=\{G_i:1\leq i\leq k^{k^{k-1}}\}$ と表し，R 上の囚人 r_i の戦略 $G_{r_i}:{}^{L}K\rightarrow K$ を $f^L\in{}^{L}K$ に対し $G_{r_i}(f^L)=G_i(f^L)$ で定める．$f^R\in{}^{R}K$ を固定し，この f^R に

対し $C'_{f^R} = \{f^L \in {}^LK : \forall r_i \in R(G_{r_i}(f^L) \neq f^R(r_i))\}$ とおく．この C'_{f^R} に対し $\forall f^R \in {}^RK(|C'_{f^R}| < k)$ が成立する．ある $f^R \in {}^RK$ があって $|C'_{f^R}| \leq k$ とする．例えば $|C'_{f^R}| = k$ として $C'_{f^R} = \{f_1^L, f_2^L, \cdots, f_k^L\}$ とおくと R の囚人は全ての L 上の戦略に対応した囚人がいるので，その中には $\forall f_i^L, f_j^L \in C'_{f^R}(G_r(f_i^L) \neq G_r(f_j^L))$ な戦略に対応した囚人 $r \in R$ が存在する．よって $G_r[C'_{f^R}] = K$ となっており，$G_r(f_i^L) = f^R(r)$ なる $f_i^L \in C'_{f^R}$ が存在するが，これは f_i^L が C'_{f^R} の要素であることに矛盾する． □

以降の証明のためにパズルでの用語を EO パズル向けに表現し直す．A^0 を ω の偶数全体の集合，A^1 を ω の奇数全体の集合とおく．つまり $\omega = A^0 \cup A^1$．A^0, A^1 上の coloring をそれぞれ f^0, f^1 で表せば ω 上の coloring f は $f = f^0 \cup f^1$ となる．囚人 $a \in A^0$ の戦略は A^1 の coloring のみに依存するため $G_a : {}^{A^1}K \to K$ と考えれる．同様に A^1 内の囚人の戦略は $G_a : {}^{A^0}K \to K$ と考えられる．するとそれぞれに固定された A^0 の戦略に対しての predictor を P^0，A^1 の囚人の戦略に対しての predictor を P^1 と書けば $P^0 : {}^{A^1}K \to {}^{A^0}K$ と $P^1 : {}^{A^0}K \to {}^{A^1}K$ と考えられ $|A^0| = |A^1| = \omega$ より $P^0, P^1 : {}^{\omega}K \to {}^{\omega}K$ である．そして ω 上の predictor P は $P = P^0 \cup P^1$ となる．

Theorem 9

$|K| < \omega$ な EO パズルに対して minimal predictor が存在する．

Proof

$|K| = k < \omega$ として $n = k^{k^{k-1}}$ とおく．A^0 を $k-1$ 人の無限個のチームに，A^1 を n 人の無限個のチームに分ける．よって

$$\begin{aligned} A^0 &= E_0 \cup E_1 \cup \cdots & \forall i \in \omega(|E_i| = k-1) \\ A^1 &= O_0 \cup O_1 \cup \cdots & \forall i \in \omega(|O_i| = n) \end{aligned}$$

とおく．このペアたちを用いてペアの列 $\{\langle E_i, O_j \rangle : \forall m \in E_i(m < \min(O_j))\}$ を構成する．あるペア $\langle E, O \rangle$ において E が Lemma 8 における L, O が R のように発言できれば，そのペアの中で 1 人が正解する．しかし $\forall m \in E(V(m) = O)$ とはなっているが EO パズルの定義から $\forall m \in O(V(m) = E)$ とはなっていない．各 E 上の coloring を $f_1, \cdots, f_{k^{k-1}}$ のように表すと，無限個の E を色付ける coloring が存在するはずなので，その中の最小を f とおく．全ての O の囚人は無限に多くの A^0 の囚人，つまり無限に多くの E が見えているので，f を知ることができる．よって全ての O の囚人はペアになっている E の coloring が f だと仮定し Lemma 8 と同様の戦略でパズルに臨めばよい．すると実際に E が f で色付けられているペアにおいて 1 人が正解するため，ここまでのことを predictor としてまとめればそれが minimal predictor である． □

次の定理が EO パズルに対しての ZFC での最後の定理である．“The Mathematics of Coordinated Inference” [5] p.34 の $|K| = \aleph_2$ な EO パズルには minimal predictor が存在しないといった定理を拡張して $|K| \geq \aleph_2$ な全ての EO パズルに対して minimal predictor が存在しないことを証明できた．

Theorem 10

$|K| \geq \aleph_2$ な全ての EO パズルに対し minimal predictor は存在しない．

Proof

$|K| = \kappa$ が正則基数のとき $\aleph_0 < \lambda < \kappa$ なもう 1 つの正則基数 λ をとる．predictor $P^0 \cup P^1$ を固定する．順序数 α に対し $f_\alpha : \omega \to \{\alpha\}$ とおく．$\forall n \in A^1 \forall \alpha < \lambda(\gamma > P^1(f_\alpha(n)))$ な $\gamma < \kappa$ が κ の正則性，$\omega < \mathrm{cf}(\kappa)$ より存在．$B = \{n \in A^0 : G_n(f_\gamma < \lambda)\}$ とおくと $\forall n \in B(\beta > G_n(f_\gamma))$ なる $\beta < \lambda$ が λ の正則性，$\omega < \mathrm{cf}(\lambda)$ より存在する．よって $P^0(f_\gamma) \cap f_\beta = \emptyset$ と $P^1(f_\beta) \cap f_\gamma = \emptyset$ なるように構成したので $A^0 \cup A^1$ の coloring $f_\beta \cup f_\gamma$ は $P^0 \cup P^1$ では全員不正解となる．$|K|$ が特異基数のときは $\aleph_0 < \lambda < \kappa < |K|$ な 2 つの正則基数 λ, κ をとり同様にすればよい． □

よって $|K| = \aleph_0$ と $|K| = \aleph_1$ の場合は minimal predictor が存在するのかという疑問が残る．どちらの場合にしても minimal predictor の存在を示すためには ZFC で決定不能な命題を仮定した証明しか知られていない．

ここからの EO パズルに対し重要な補題を示す．

Lemma 11

$|K| = \kappa$ とした EO パズルに対し ${}^\omega\kappa$ が agreeable ならば minimal predictor が存在する．

Proof

$|{}^\omega\kappa| = \lambda$ とおいて $\prec$ を ${}^\omega\kappa$ 上の順序型 λ な整列順序とする．$f \in {}^\omega\kappa$ に対し $\hat{f} = \prec -\min\{g \in {}^\omega\kappa : |f \cap g| = \omega\}$ とする．すると任意の $f \in {}^\omega\kappa$ に対し $|\{g \in {}^\omega\kappa : g \preceq \hat{f}\}| < \lambda$ である．よって ${}^\omega\kappa$ が agreeable なのでどの $\{g \in {}^\omega\kappa : g \preceq \hat{f}\}$ の要素に対しても infinitely agree な $h \in {}^\omega\kappa$ が存在する．$p : {}^\omega\kappa \to {}^\omega\kappa$ を f に対してそのような h に写す関数として predictor $P^0 \cup P^1$ を $p \cup p$ とする．$p \cup p$ が minimal であることを確かめるために $f^0 \cup f^1$ を任意にとり $\hat{f^0} \preceq \hat{f^1}$ だったとする．$|p(f^1) \cap \hat{f^0}| = \omega$，そして $|p(f^1) \cap f^0|$ より A^0 で無限に多くの囚人が正解している． □

まず最初に用いる独立命題は CH である．

Theorem 12

CH を仮定する．$|K| = \aleph_1$ な EO パズルに minimal predictor が存在する．

Proof

Lemma 11 より ${}^{\omega}\omega_1$ が agrreeable であることを示す．$|F| < |{}^{\omega}\omega_1|$ な $F \subseteq {}^{\omega}\omega_1$ をとると CH より $|{}^{\omega}\omega_1| = \aleph_1$ なので $|F| \leq \aleph_0$ より $F = \{f_i : i \in \omega\}$ と表す．$\{g_i : i \in \omega\}$ を各 f_i が無限回現れるような関数列とし，$g : \omega \to \omega_1$ を $g(n) = g_n(n)$ で定義すれば g は全 f_i と infinitely agree である． □

次に $|K| = \aleph_0$ な EO パズルについての結果である．“The Mathematics of Coordinated Inference” [5] p.36 において次の結果が紹介されている．

Theorem 13

$\mathrm{non}(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ を仮定する．以下は同値．

(1) $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \aleph_2$
(2) $\mathrm{MA}_{\aleph_1}(\mathrm{countable})$
(3) ${}^{\omega}\omega$ は agreeable
(4) $|K| = \aleph_0$ の EO パズルに対して minimal predictor が存在する．

Lemma 2 より (2) は $\mathfrak{m}_{countable} = \aleph_2$ と言い換えられる．この定理より CH の否定と $\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{M})$ の決定を組み合わせた独立命題である $\aleph_1 < \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ という仮定から $|K| = \aleph_0$ な EO パズルに minimal predictor が存在する．本論文では $2^{\aleph_0}$ のサイズを仮定しないというより強い定理を示す．

Theorem 14

$2^{\aleph_0} = \lambda > \aleph_1$ かつ $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \lambda$ であると仮定する．以下は同値．

(1) $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \lambda$
(2) $\mathfrak{m}_{\mathrm{countable}} = \lambda$
(3) ${}^{\omega}\omega$ は agreeable
(4) $|K| = \aleph_0$ の EO パズルに対して minimal predictor が存在する．

Proof

(1) $\Leftrightarrow$ (2) は Lemma 2, (3) $\Rightarrow$ (4) は lemma 11 より分かる．(2) $\Rightarrow$ (3) と (4) $\Rightarrow$ (1) を示す．

(2) ⇒ (3)　poset $\mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ を ω から ω への有限な関数全体とし半順序 $q \leq p$ は $q \supseteq p$ で定義されている．$|\mathrm{Fn}(\omega,\omega)| = \omega$ である．${}^\omega\omega$ が agreeable であることを示すために $|F| < |{}^\omega\omega| = 2^{\aleph_0} = \lambda$ な $F \subseteq {}^\omega\omega$ を固定する．$f \in F$ と $n \in \omega$ に対し $D_{f,n} = \{q \in \mathrm{Fn}(\omega,\omega) : n \in \mathrm{dom}(f) \wedge \exists k \geq n(f(k) = q(k))\}$ とおくと各 $D_{f,n}$ は dense. そして $\mathcal{D} = \{D_{f,n} : f \in F \wedge n \in \omega\}$ とおくと $|\mathcal{D}| = |F| < \lambda$ より $\mathfrak{m}_{\mathrm{countable}} = \lambda$ から $\mathcal{D}$-generic filter G が存在する．$\bigcup G : \omega \to \omega$ はその作り方から全ての $f \in F$ と infinitely agree.

(4) ⇒ (1)　対偶を示す．$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \neq \lambda$，つまり $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) < \lambda$ とする．Lemma 7 より全ての predictor に対し有限人のみしか正解しないような coloring を構成する．predictor $P^0 \cup P^1$ をとる．$\forall g \in {}^\omega\omega \exists f \in F(|f \cap g| < \omega$ をみたす最小のサイズの $F \subseteq {}^\omega\omega$ をとる．Lemma 3 (a) より $|F| = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ より $|F| < \lambda$. A^0 の囚人は何らかの F の要素で色付けるがまだ固定しない．$F' = \{P^1(f) : f \in F\}$ とおくと $|F'| \leq |F| < \lambda = \mathrm{non}(\mathcal{M})$ より Lemma 3 (b) から $\exists g \in {}^\omega\omega \forall f \in F'(f$ と g は infinitely agree でない)，つまり $\exists g \in {}^\omega\omega \forall f \in F'(|f \cap g| < \omega)$ よりそのような g を固定し f^1 とする．$P^0(f^1)$ に対し F の定義から $\exists f \in F(|f \cap P^0(f^1)| < \omega)$ より，そのような f の 1 つは f^0 とする．f^0, f^1 の作り方から predictor $P^0 \cup P^1$ で coloring $f^0 \cup f^1$ では有限人しか正解しない．

□

参考文献

[1] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[2] A. Blass. Cardinal characteristics and the product of countably many infinite cyclic groups. *J. Algebra*, Vol. 169, pp. 512–540, 1994.

[3] M. Gardner. *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.* Simon and Schuster, 1959.

[4] S. Geschke, R. Lubarsky, and M. Rahn. Choice and the hat game. In *Infinitary combinatorics in set theory and its applications*, No. 1949 in RIMS Kokyuroku, pp. 34–44. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2015.

[5] C. S. Hardin and A. D. Taylor. *The Mathematics of Coordinated Inference.* Springer, 2010.